

# Une remarque sur les espaces d'interpolation faiblement localement uniformément convexes

Daher Mohammad

Département de Mathématiques, Université Paris 7

e-mail: m.daher@orange.fr

March 4, 2013

*Résumé:* Soient  $(A_0, A_1)$  un couple d'interpolation, et  $B_j$  l'adhérence de  $A_0^* \cap A_1^*$  dans  $A_j^*$ ,  $j = 0, 1$ . Pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ , il existe une contraction injective naturelle  $R^\theta : A^\theta \rightarrow (B_0^*, B_1^*)^\theta$ . On suppose que, pour un  $\beta \in ]0, 1[$ , l'adhérence de  $R^\beta(A^\beta)$  dans  $(B_0^*, B_1^*)^\beta$  est faiblement LUR. Alors  $A^\theta = A_\theta$  pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ .

*Abstract:* Let  $(A_0, A_1)$  be an interpolation couple, and let  $B_j$  be the closure of  $A_0^* \cap A_1^*$  in  $A_j^*$ ,  $j = 0, 1$ . For every  $\theta \in ]0, 1[$ , there exists a natural one to one contraction  $R^\theta : A^\theta \rightarrow (B_0^*, B_1^*)^\theta$ . For some  $\beta \in ]0, 1[$ , the closure of  $R^\beta(A^\beta)$  in  $(B_0^*, B_1^*)^\beta$  is supposed to be weakly LUR. Then  $A^\theta = A_\theta$  for every  $\theta \in ]0, 1[$ .

*AMS Classification:* 46B70

*Mots clés:* Interpolation, espace faiblement-LUR

*Avertissement:* Une première version de ce travail a été publiée dans Colloq. Math. Vol. 113, No. 2, 197-204, (2011). Le lemme 1 de cette version est malheureusement faux, ce qui oblige à corriger l'ensemble. L'auteur remercie Sten Kaijser de lui avoir signalé l'erreur dans la preuve. Un rectificatif indiquant les corrections a été envoyé à Colloq. Math.. Il nous a cependant semblé utile de présenter une version révisée complète.

# 1 Introduction et notations

On note  $X^*$  le dual d'un espace de Banach  $X$ .

Soit  $\overline{A} = (A_0, A_1)$  un couple d'interpolation complexe, au sens de [BL]. Soit  $S = \{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ .

Rappelons d'abord la définition de l'espace d'interpolation  $A_\theta$ , où  $\theta \in ]0, 1[$  [BL, chapitre 4]. On note  $\mathcal{F}(\overline{A})$  l'espace des fonctions  $F$  à valeurs dans  $A_0 + A_1$ , continues bornées sur  $S$ , holomorphes à l'intérieur de  $S$ , telles que, pour  $j \in \{0, 1\}$ ,  $F(j + i\tau)$  prend ses valeurs dans  $A_j$  et  $\|F(j + i\tau)\|_{A_j} \rightarrow 0$ , quand  $|\tau| \rightarrow +\infty$ . On munit  $\mathcal{F}(\overline{A})$  de la norme

$$\|F\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} = \max(\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|F(i\tau)\|_{A_0}, \sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|F(1 + i\tau)\|_{A_1}).$$

L'espace  $A_\theta = (A_0, A_1)_\theta = \{F(\theta); F \in \mathcal{F}(\overline{A})\}$  est un Banach [BL, theorem 4.1.2] pour la norme définie par

$$\|a\|_{A_\theta} = \inf \left\{ \|F\|_{\mathcal{F}(\overline{A})}; F(\theta) = a \right\}.$$

Rappelons maintenant la définition de l'espace d'interpolation  $A^\theta$  [BL, chapitre 4]. On note  $\mathcal{G}(\overline{A})$  l'espace des fonctions  $g$  à valeurs dans  $A_0 + A_1$ , continues sur  $S$ , holomorphes à l'intérieur de  $S$ , telles que  $z \rightarrow (1 + |z|)^{-1} \|g(z)\|_{A_0 + A_1}$  est bornée sur  $S$ ,  $g(j + i\tau) - g(j + i\tau') \in A_j$  pour tous  $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$ ,  $j \in \{0, 1\}$ , et la quantité suivante est finie:

$$\begin{aligned} & \|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})} \\ = & \max \left[ \sup_{\substack{\tau, \tau' \in \mathbb{R} \\ \tau \neq \tau'}} \left\| \frac{g(i\tau) - g(i\tau')}{\tau - \tau'} \right\|_{A_0}, \sup_{\substack{\tau, \tau' \in \mathbb{R} \\ \tau \neq \tau'}} \left\| \frac{g(1 + i\tau) - g(1 + i\tau')}{\tau - \tau'} \right\|_{A_1} \right]. \end{aligned}$$

Cette quantité définit une norme sur l'espace  $Q\mathcal{G}(\overline{A})$ , quotient de  $\mathcal{G}(\overline{A})$  par les applications constantes à valeurs dans  $A_0 \cap A_1$ , et  $Q\mathcal{G}(\overline{A})$  est complet pour cette norme [BL, lemma 4.1.3].

On rappelle [BL, p. 89] que, pour  $g \in \mathcal{G}(\overline{A})$ ,

$$\|g'(z)\|_{A_0 + A_1} \leq \|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}, \quad z \in S. \quad (1)$$

C'est une conséquence immédiate de l'inégalité

$$\left\| \frac{g(z+it) - g(z)}{t} \right\|_{A_0+A_1} \leq \|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}, \quad z \in S, \quad t \in \mathbb{R}^*,$$

qui découle de la définition de  $\|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}$  et du théorème des trois droites [BL, lemma 1.1.2] appliqué aux fonctions  $z \rightarrow \langle (g(z+it) - g(z))/t, a^* \rangle$ ,  $t$  réel fixé, où  $a^*$  parcourt la boule unité de  $A_0^* \cap A_1^*$ .

L'espace  $A^\theta = \{ g'(\theta); g \in \mathcal{G}(\overline{A}) \}$  est un Banach [BL, theorem 4.1.4] pour la norme définie par

$$\|a\|_{A^\theta} = \inf \left\{ \|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}; g'(\theta) = a \right\}.$$

D'après (1)  $\|a\|_{A_0+A_1} \leq \|a\|_{A^\theta}$ . La contraction  $A^\theta \rightarrow A_0 + A_1$  est injective par définition de  $A^\theta$ .

D'après [B],  $A_\theta$  s'identifie isométriquement à un sous espace de  $A^\theta$ .

D'après [BL, theorem 4.2.2],  $A_0 \cap A_1$  est toujours dense dans  $A_\theta$ ,  $0 < \theta < 1$ . Si  $A_0 \cap A_1$  est dense dans  $A_0$  et  $A_1$ , on a  $(A_0 \cap A_1)^* = A_0^* + A_1^*$ ,  $A_0^* \cap A_1^* = (A_0 + A_1)^*$  [BL, theorem 2.7.1], on peut appliquer le théorème d'itération [BL, theorem 4.6.1] et  $(A_\theta)^* = (A_0^*, A_1^*)^\theta$ ,  $\theta \in ]0, 1[$  [BL, theorem 4.5.1]. On fait cette hypothèse dans la suite.

**Définition 1** [DGZ] *Un espace de Banach  $X$  est localement uniformément convexe, ce qu'on note LUR (resp. faiblement LUR) si, pour tout  $x \in X$  et pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  dans  $X$  satisfaisant*

$$\|x_n\|^2/2 + \|x\|^2/2 - \|(x_n + x)/2\|^2 \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0,$$

*alors  $x_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} x$  en norme (resp. faiblement).*

## 2 Résultats

Notons  $B_j$  l'adhérence de  $A_0^* \cap A_1^*$  dans  $A_j^*$ ,  $j = 0, 1$ . Il est clair que  $B_0 \cap B_1 = A_0^* \cap A_1^*$ , isométriquement. D'après [BL, Theorem 4.2.2 b)] on a isométriquement, pour  $\theta \in ]0, 1[$ ,

$$(B_0, B_1)_\theta = (A_0^*, A_1^*)_\theta. \quad (2)$$

Comme  $B_0 \cap B_1$  est dense dans  $B_j$ , le dual de  $B_\theta = (B_0, B_1)_\theta$  est  $(B_0^*, B_1^*)^\theta$  [BL, theorem 4.5.1] et, d'après [BL, theorem 2.7.1],

$$B_0^* + B_1^* = (B_0 \cap B_1)^* = (A_0^* \cap A_1^*)^* = (A_0 + A_1)^{**}.$$

En particulier,  $A_0 + A_1$  s'identifie isométriquement à un sous espace fermé de  $B_0^* + B_1^*$ .

Soit  $i_j : B_j \rightarrow A_j^*$  l'application identité; la restriction de son adjoint  $i_j^* : A_j \rightarrow B_j^*$ ,  $j = 0, 1$ , est contractante.

**Lemme 2** *Soit  $R : Q\mathcal{G}(A_0, A_1) \rightarrow Q\mathcal{G}(B_0^*, B_1^*)$  l'application qui est définie par  $g(j + i \cdot) \rightarrow i_j^*(g(j + i \cdot))$ ,  $j = 0, 1$ . L'application  $R$  est une contraction et induit une contraction injective*

$$R^\theta : A^\theta \rightarrow (B_0^*, B_1^*)^\theta, \theta \in ]0, 1[.$$

Démonstration: Il est clair que  $R$  est une contraction (non injective en général). On identifie  $A^\theta$  et  $(B_0^*, B_1^*)^\theta$  à des quotients de  $Q\mathcal{G}(A_0, A_1)$  et  $Q\mathcal{G}(B_0^*, B_1^*)$  respectivement. Notant que  $(R(\dot{g}))'(\theta) = R^\theta(g'(\theta))$ ,  $R$  induit une contraction  $R^\theta$  sur ces quotients. Notons que, pour  $a \in A^\theta$ , pour  $b \in B_0 \cap B_1 = A_0^* \cap A_1^* = (A_0 + A_1)^*$  (espace dense dans  $B_\theta$ ),

$$\langle R^\theta(a), b \rangle = \langle a, b \rangle.$$

Si  $R^\theta(a) = 0$ , alors  $\langle a, b \rangle = 0$  pour tout  $b \in B_0 \cap B_1 = (A_0 + A_1)^*$ , d'où  $a = 0$  dans  $A_0 + A_1$ , et dans  $A^\theta$ . ■

**Théorème 3** *Soient  $(A_0, A_1)$  un couple d'interpolation complexe et  $B_j$  l'adhérence de  $A_0^* \cap A_1^*$  dans  $A_j^*$ ,  $j = 0, 1$ ,  $\beta \in ]0, 1[$ ,  $R^\beta$  définie comme ci-dessus. Soit  $Z^\beta$  l'adhérence de  $R^\beta(A^\beta)$  dans  $(B_0^*, B_1^*)^\beta$ . Supposons que  $Z^\beta$  est un espace faiblement-LUR. Alors  $A^\theta = A_\theta$ , pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ .*

La démonstration nécessite les lemmes suivants.

**Lemme 4** *Pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ ,  $R^\theta$  est une isométrie:  $A_\theta \rightarrow (B_0^*, B_1^*)^\theta$ .*

Démonstration: Comme  $A_\theta$  s'identifie à un sous-espace de  $A^\theta$  [B],  $R^\theta$  est contractante:  $A_\theta = (A_0, A_1)_\theta \rightarrow (B_0^*, B_1^*)^\theta$  par le lemme 2. Comme  $A_0 \cap A_1$  est dense dans  $A_\theta$ , il suffit de montrer que  $\|a\|_{A_\theta} \leq \|R^\theta(a)\|_{(B_0^*, B_1^*)^\theta}$  lorsque  $a \in A_0 \cap A_1$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ ; comme  $(A_\theta)^* = (A_0^*, A_1^*)^\theta$ , il existe  $g \in \mathcal{G}(A_0^*, A_1^*)$  tel que

$$\|a\|_{A_\theta} < |\langle a, g'(\theta) \rangle| + \varepsilon, \quad \|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(A_0^*, A_1^*)} \leq 1. \quad (3)$$

Soient

$$F_n(z) = in [g(z + i/n) - g(z)], \quad z \in S$$

et  $F_{n,\delta}(z) = e^{\delta z^2} F_n(z)$ , pour  $\delta > 0$ . Comme  $|F_n|$  est bornée sur le bord de  $S$ ,  $|F_{n,\delta}|$  tend vers 0 à l'infini sur le bord, d'où  $F_{n,\delta} \in \mathcal{F}(A_0^*, A_1^*)$ . Par définition

$$\|F_{n,\delta}(\theta)\|_{(A_0^*, A_1^*)_\theta} \leq \|F_{n,\delta}\|_{\mathcal{F}(A_0^*, A_1^*)} \leq e^\delta \sup_{z \in S} |F_n(z)| \leq e^\delta \|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(A_0^*, A_1^*)} \leq e^\delta.$$

D'où, pour tout  $n$ , par (2),

$$\|F_n(\theta)\|_{(B_0, B_1)_\theta} = \|e^{-\delta\theta^2} F_{n,\delta}(\theta)\|_{(A_0^*, A_1^*)_\theta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \|e^{-\delta\theta^2} F_{n,\delta}(\theta)\|_{(A_0^*, A_1^*)_\theta} \leq 1.$$

Comme  $g$  est holomorphe à valeurs dans  $A_0^* + A_1^* = (A_0 \cap A_1)^*$ ,  $\langle a, F_n(\theta) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle a, g'(\theta) \rangle$ . Il existe  $n_0$  assez grand tel que, d'après (3),

$$\begin{aligned} & -2\varepsilon + \|a\|_{A_\theta} < |\langle a, F_{n_0}(\theta) \rangle| \\ & \leq \|R^\theta(a)\|_{(B_0^*, B_1^*)^\theta} \|F_{n_0}(\theta)\|_{(B_0, B_1)_\theta} \leq \|R^\theta(a)\|_{(B_0^*, B_1^*)^\theta}, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité cherchée lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ■

**Lemme 5** Soient  $g \in \mathcal{G}(\overline{A})$ ,  $\theta \in ]0, 1[$ . L'application:  $\tau \rightarrow R^\theta(g'(\theta + i\tau))$  est bornée de  $\mathbb{R}$  dans  $(B_0^*, B_1^*)^\theta$ . Pour tout  $c \in (B_0^*, B_1^*)^\theta$ , l'application:  $\tau \rightarrow \|c + R^\theta(g'(\theta + i\tau))\|_{(B_0^*, B_1^*)^\theta}$  est s.c.i. sur  $\mathbb{R}$ .

Démonstration: Par définition de  $A^\theta$ ,  $g'(\theta) \in A^\theta$ ; par le lemme 2

$$\|R^\theta(g'(\theta))\|_{(B_0^*, B_1^*)^\theta} \leq \|g'(\theta)\|_{A^\theta} \leq \|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}.$$

La fonction  $g_{i\tau}$  définie par  $g_{i\tau}(z) = g(z + it)$ ,  $z \in S$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , vérifie  $\|\dot{g}_{i\tau}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})} = \|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}$ , donc  $\|R^\theta(g'_{i\tau}(\theta))\|_{(B_0^*, B_1^*)^\theta} \leq \|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}$ .

D'après (2), et comme  $B_0 \cap B_1 = A_0^* \cap A_1^*$  est dense dans  $B_\theta$ , on a

$$\begin{aligned}
& \|c + R^\theta(g'(\theta + i\tau))\|_{(B_0^*, B_1^*)^\theta} \\
&= \sup \{ |\langle b, c + R^\theta(g'(\theta + i\tau)) \rangle| ; \|b\|_{(B_0, B_1)_\theta} \leq 1 \} \\
&= \sup \{ |\langle a^*, c + g'(\theta + i\tau) \rangle| ; a^* \in A_0^* \cap A_1^*, \|a^*\|_{(A_0^*, A_1^*)_\theta} \leq 1 \}.
\end{aligned}$$

Comme  $g$  est holomorphe à valeurs dans  $A_0 + A_1$ , pour tout  $a^* \in A_0^* \cap A_1^* = (A_0 + A_1)^*$ , les applications  $\tau \rightarrow |\langle a^*, c + g'(\theta + i\tau) \rangle|$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ . Leur supremum est donc s.c.i.. ■

**Lemme 6** Soient  $\overline{C} = (C_0, C_1)$  un couple d'interpolation,  $\beta \in ]0, 1[$ ,  $Z^\beta$  un sous-espace fermé faiblement-LUR de  $C^\beta$ ,  $g \in \mathcal{G}(\overline{C})$ . On suppose que l'application  $\phi_\beta : \tau \in \mathbb{R} \rightarrow g'(\beta + i\tau)$  est bornée à valeurs dans  $Z^\beta$  et que l'application  $\|c + \phi_\beta\|_{C^\beta}$  est s.c.i., pour tout  $c \in Z^\beta$  fixé. Alors  $\phi_\beta$  est p.s. égale à une fonction fortement mesurable:  $\mathbb{R} \rightarrow Z^\beta \subset C^\beta$ .

Preuve: Comme  $s \rightarrow \|\phi_\beta(\tau) + \phi_\beta(s)\|_{Z^\beta}$  est s.c.i. sur  $\mathbb{R}$ , si  $\tau_n \rightarrow \tau$ ,

$$\begin{aligned}
& 0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} E_n \\
&= \overline{\lim} \{ 2\|\phi_\beta(\tau)\|_{Z^\beta}^2 + 2\|\phi_\beta(\tau_n)\|_{Z^\beta}^2 - \|\phi_\beta(\tau) + \phi_\beta(\tau_n)\|_{Z^\beta}^2 \} \\
&\leq 2\|\phi_\beta(\tau)\|_{Z^\beta}^2 + 2\overline{\lim} \|\phi_\beta(\tau_n)\|_{Z^\beta}^2 - \underline{\lim} \|\phi_\beta(\tau) + \phi_\beta(\tau_n)\|_{Z^\beta}^2 \\
&\leq 2\|\phi_\beta(\tau)\|_{Z^\beta}^2 + 2\overline{\lim} \|\phi_\beta(\tau_n)\|_{Z^\beta}^2 - 4\|\phi_\beta(\tau)\|_{Z^\beta}^2 \\
&= 2\overline{\lim} \|\phi_\beta(\tau_n)\|_{Z^\beta}^2 - 2\|\phi_\beta(\tau)\|_{Z^\beta}^2.
\end{aligned}$$

Comme  $\|\phi_\beta\|_{Z^\beta}$  est mesurable bornée, pour tout  $N$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe, d'après le théorème de Lusin, un compact  $K_{N,\varepsilon} \subset [-N, N]$ , de mesure  $> 2N - \varepsilon$ , sur lequel  $\|\phi_\beta\|_{Z^\beta}$  est continue. Soit  $(\tau_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $K_{N,\varepsilon}$  convergeant vers  $\tau$ . D'après ce qui précède  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} E_n = 0$ . Comme  $E_n \geq 0$ ,  $E_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ . Par définition de la propriété faiblement-LUR de  $Z^\beta$ , cela entraîne que  $\phi_\beta(\tau_n) \rightarrow \phi_\beta(\tau)$  faiblement dans  $Z^\beta$ , c'à d  $\phi_\beta$  est faiblement continue sur  $K_{N,\varepsilon}$ . Soit  $Y$  le sous espace fermé de  $Z^\beta$  engendré par  $\phi_\beta(K_{N,\varepsilon})$ . Alors  $Y$  est séparable: sinon, étant donnée une suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  dense dans  $K_{N,\varepsilon}$ , il existe, d'après le théorème de Hahn-Banach,  $z \in Y^*$ , non nul, tel que  $(\phi_\beta(s_n), z) = 0$  pour tout  $n$ ; par continuité  $s \rightarrow (\phi_\beta(s), z)$  est nulle sur  $K_{N,\varepsilon}$ , d'où  $z = 0$  et la contradiction. Par le théorème de Pettis [DU, theorem II 2],  $\phi_\beta$  est fortement mesurable:  $K_{N,\varepsilon} \rightarrow Y \subset Z^\beta$ . Cela montre le résultat annoncé. ■

**Lemme 7** Soient  $g \in \mathcal{G}(\overline{A})$ ,  $\phi_\theta(t) = g'(\theta + it)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

i) Si  $\phi_\theta$  est à valeurs dans un sous espace fermé séparable  $Z$  de  $A_\theta$ , elle est fortement mesurable:  $\mathbb{R} \rightarrow A_\theta$ .

ii) Si  $\phi_\theta$  est à valeurs dans un sous espace fermé séparable  $Z$  de  $A^\theta$ , elle est fortement mesurable:  $\mathbb{R} \rightarrow A^\theta$ .

Dans la suite on utilise seulement i), dans la preuve du lemme 8 d). On donne deux preuves de i) (noter que ii) implique i)).

Preuve: i) D'après le lemme 4,  $Z$  est un sous espace fermé de  $(B_0^*, B_1^*)^\theta$  et, d'après le lemme 5, l'application  $t \rightarrow \|\phi_\theta(t) - c\|_Z$  est s.c.i. pour tout  $c \in Z$ . L'image réciproque par  $\phi_\theta$  de toute boule ouverte de  $Z$  est donc un borélien. Comme  $Z$  est séparable, tout ouvert de  $Z$  est réunion dénombrable de boules, donc  $\phi_\theta$  est bien mesurable à valeurs dans  $Z$ . ■

ii) Soient  $J$  l'injection canonique:  $Z \rightarrow A_0 + A_1$ , et  $Y$  l'adhérence de  $J(Z)$  dans  $A_0 + A_1$ . Comme  $Z$  et  $Y$  sont des espaces polonais, comme  $J$  est continue,  $J^{-1}$  est borélienne:  $J(Z) \rightarrow Z$ , voir par exemple [A]. Comme  $J \circ \phi_\theta : \mathbb{R} \rightarrow A_0 + A_1$  est continue et à valeurs dans  $J(Z)$ , comme  $\phi_\theta = J^{-1} \circ (J \circ \phi_\theta)$ , alors  $\phi_\theta$  est borélienne:  $\mathbb{R} \rightarrow Z$ . ■

**Lemme 8** Soient  $g \in \mathcal{G}(\overline{A})$ ,  $\beta \in ]0, 1[$  et  $\phi_\beta(\cdot) = g'(\beta + i \cdot)$ .

a) On suppose que  $R^\beta \circ \phi_\beta$  est p.s. égale à une fonction fortement mesurable:  $\mathbb{R} \rightarrow (B_0^*, B_1^*)^\beta$ . Alors  $\phi_\beta$  est p.s. à valeurs dans  $A_\beta$ .

On suppose désormais que  $\phi_\beta$  est p.s. égale à une fonction fortement mesurable:  $\mathbb{R} \rightarrow A_\beta$ . Alors

b) pour  $\theta \neq \beta$ ,  $g'(\theta) \in A_\theta$ .

c) pour tout  $\theta \neq \beta$ ,  $\phi_\theta$  est à valeurs dans un sous espace séparable de  $A_\theta$ .

d)  $g'(\beta) \in A_\beta$ .

On a noté  $R^\beta \circ \phi_\beta$  la fonction:  $t \rightarrow R^\beta(g'_{it}(\beta))$ .

Preuve: a) *étape 1*: Comme  $g$  est holomorphe à l'intérieur de  $S$ , pour tous  $t \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$ ,  $\theta \in ]0, 1[$ , on a, dans  $A_0 + A_1$ ,

$$g(\theta + i(t + h)) - g(\theta + it) = \int_t^{t+h} g'(\theta + i\tau) d\tau \quad (4)$$

Posons

$$g_1 = g - g(0) - \alpha_0$$

où  $g(1) - g(0) = \alpha_0 + \alpha_1$  ( $\alpha_j \in A_j$ ,  $j = 0, 1$ ), avec

$$\|g(1) - g(0)\|_{A_0+A_1} = \|\alpha_0\|_{A_0} + \|\alpha_1\|_{A_1}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis et (1)

$$\|g(1) - g(0)\|_{A_0+A_1} \leq \|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}.$$

Alors  $g_1 : S \rightarrow A_0 + A_1$  est continue sur  $S$  et holomorphe à l'intérieur de  $S$ . Comme  $g \in \mathcal{G}(\overline{A})$ , pour tout  $\tau \in \mathbb{R}$  et  $j \in \{0, 1\}$ , on a

$$\|g_1(j + i\tau)\|_{A_j} \leq \|g(j + i\tau) - g(j)\|_{A_j} + \|\alpha_j\|_{A_j} \leq (1 + |\tau|)\|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}.$$

L'application  $z \rightarrow G_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon z^2} g_1(z)$  est donc dans  $\mathcal{F}(\overline{A})$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . En particulier, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $G_\varepsilon(\theta + it) \in A_\theta$ , donc  $g_1(\theta + it) \in A_\theta$ . D'où

$$g_1(\theta + i(t+h)) - g_1(\theta + it) = g(\theta + i(t+h)) - g(\theta + it) \in A_\theta.$$

Alors, d'après (4),  $\int_t^{t+h} g'(\theta + i\tau) d\tau$  est dans  $A_\theta$ , pour  $t$  et  $h$  réels.

*étape 2:* Par hypothèse  $R^\beta \circ \phi_\beta$  est p.s. égale à une fonction fortement mesurable:  $\mathbb{R} \rightarrow Z^\beta$ , où  $Z^\beta$  est l'adhérence de  $A^\beta$  dans  $(B_0^*, B_1^*)^\beta$ . Le théorème de différentiabilité de Lebesgue [DU, chap. II theorem 9 p 48] entraînent que, p.s., on a dans  $Z^\beta$  l'égalité

$$iR^\beta \circ \phi_\beta(it) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} R^\beta \circ \phi_\beta(i\tau) d\tau = \lim_{h \rightarrow 0} R^\beta \left( \frac{1}{h} \int_t^{t+h} g'(\beta + i\tau) d\tau \right), \quad (5)$$

où  $h$  est réel. D'après la fin de l'étape 1 appliquée en  $\beta$  et le lemme 4, cette limite dans  $Z^\beta$  est en fait une limite dans  $A_\beta$ , càd p.s.  $g'(\beta + i \cdot) \in A_\beta$ .

b) On suppose d'abord  $\theta > \beta$ .

*étape 1:* Soit

$$V(z) = g_1(\beta + (1 - \beta)z), \quad z \in S.$$

Cette fonction à valeurs dans  $A_0 + A_1$  est holomorphe à l'intérieur de  $S$  et continue sur  $S$ , donc s'exprime à l'aide de la mesure harmonique sur le bord de  $S$ . Pour vérifier que  $V$ , vue comme fonction à valeurs dans  $A_\beta + A_1$ , est holomorphe à l'intérieur de  $S$  et continue sur  $S$ , il suffira donc de voir que  $V$  est continue sur l'axe imaginaire, à valeurs dans  $A_\beta$ .



On va montrer que  $V \in \mathcal{G}(A_\beta, A_1)$  avec une norme  $\leq (1 - \beta)\|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}$ . L'inégalité correspondante sur la droite  $\text{Re} = 1$  est évidente. Pour la vérifier sur l'axe imaginaire, posons, pour  $\tau, \tau'$  réels fixés,

$$F_{\tau, \tau'}(\xi) = \frac{g(\xi + i(1 - \beta)\tau) - g(\xi + i(1 - \beta)\tau')}{\tau - \tau'}, \quad \xi \in S,$$

d'où  $F_{\tau, \tau'}(\beta) = (V(i\tau) - V(i\tau'))/(\tau - \tau')$ , et  $F_{\tau, \tau'}(1) = (V(1 + i\tau) - V(1 + i\tau'))/(\tau - \tau')$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\|F_{\tau, \tau'}(j + it)\|_{A_j} \leq (1 - \beta)\|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}, \quad j \in \{0, 1\}.$$

Comme dans l'étape 1 de a), pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'application  $\xi \rightarrow H_{\varepsilon, \tau, \tau'}(\xi) = e^{\varepsilon \xi^2} F_{\tau, \tau'}(\xi)$  vérifie

$$\|H_{\varepsilon, \tau, \tau'}\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} \leq e^\varepsilon (1 - \beta)\|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})},$$

d'où

$$\|F_{\tau, \tau'}(\beta)\|_{A_\beta} \leq (1 - \beta)\|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})}.$$

On a donc, pour tous  $\tau, \tau'$  réels,

$$\|V(i\tau) - V(i\tau')\|_{A_\beta} \leq |\tau - \tau'| (1 - \beta)\|\dot{g}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{A})},$$

ce qui prouve la continuité de  $V$  sur l'axe imaginaire, à valeurs dans  $A_\beta$ , et l'assertion annoncée.

*étape 2:* d'après la preuve de a), pour  $h$  réel, p.s.

$$\lim_{h \rightarrow 0} (V(i(\tau + h)) - V(i\tau))/h = (1 - \beta)g'(\beta + (1 - \beta)i\tau) \quad \text{dans } A_\beta.$$

D'après [BL, lemma 4.3.3], on a alors

$$V'(\eta) \in (A_\beta, A_1)_\eta, \quad \eta \in ]0, 1[.$$

*étape 3:* Choisissons  $\eta$  tel que  $\theta = (1 - \eta)\beta + \eta$ . D'après le théorème de réitération [BL, theorem 4.6.1],  $(A_\beta, A_1)_\eta = A_\theta$ , donc

$$V'(\eta) = (1 - \beta)g'(\theta) \in A_\theta,$$

ce qui achève la preuve lorsque  $\beta < \theta$ .

Si  $0 < \theta < \beta$  le raisonnement est analogue, en remplaçant  $V$  par  $W(z) = g_1(\beta z) \in \mathcal{G}(A_0, A_\beta)$ , telle que  $\lim_{h \rightarrow 0} (W(1 + i(\tau + h)) - W(1 + i\tau))/h$  existe dans  $A_\beta$ , pour presque tout  $\tau$ , avec  $h$  réel.

c) Soit  $A'_0 \subset A_0$  le sous espace fermé séparable engendré par  $\{g_1(it), t \in \mathbb{R}\}$ . Comme  $g_1$  est continue sur  $S$ ,  $A'_0$  est séparable, ainsi que  $(A'_0, A_1)_\beta$  et son adhérence  $Y$  dans  $A_\beta$ . Par l'étape 2 de b) appliquée au couple  $(A'_0, A_1)$ ,  $g'(\beta + it)$  est p.s. dans  $(A'_0, A_1)_\beta$ , donc p.s. dans  $Y$ , ce qui règle le cas  $\theta = \beta$ .

Pour le cas  $\beta < \theta$ , remplaçons la fonction  $V$  de l'étape 1 de b) par  $V_t(z) = V(z + it)$ , avec  $t$  fixé réel. Comme en b),  $V_t \in \mathcal{G}(Y, A_1)$ ,  $V'_t(\eta) \in (Y, A_1)_\eta$ ,  $\eta \in ]0, 1[$  et  $(Y, A_1)_\eta$  est séparable. Soit  $\eta$  défini comme dans l'étape 3 de b). Comme ci-dessus,  $V'_t(\eta) = (1 - \beta)g'(\theta + i(1 - \beta)t)$ . Soit  $Z_\theta$  l'adhérence de  $(Y, A_1)_\eta$  dans  $(A_\beta, A_1)_\eta = A_\theta$ ;  $Z_\theta$  est donc séparable et  $\phi_\theta = g'(\theta + i.)$  est à valeurs dans  $Z_\theta$ .

On raisonne de façon analogue si  $0 < \theta < \beta$  en considérant  $W_t(z) = W(z + it)$ :  $W_t$  est dans  $\mathcal{G}(A'_0, Y)$ .

d) Soit  $\theta > \beta$ . Par c) et le lemme 7 i),  $\phi_\theta$  est fortement mesurable à valeurs dans  $A_\theta$ . Alors b) appliqué en échangeant les rôles de  $\beta$  et  $\theta$  donne  $g'(\beta) \in A_\beta$ . ■

*Démonstration du théorème 1:* Soient  $a \in A^\beta$  et  $g \in \mathcal{G}(\overline{A})$  tel que  $a = g'(\beta)$ . D'après le lemme 5, l'application  $R^\beta \circ \phi_\beta : \tau \in \mathbb{R} \rightarrow R^\beta(g'(\beta + i\tau))$  est à valeurs dans  $Z^\beta \subset (B_0^*, B_1^*)^\beta$  et vérifie les hypothèses du lemme 6 pour  $C^\beta = (B_0^*, B_1^*)^\beta$ . Grâce à l'hypothèse sur  $Z^\beta$ , on peut appliquer le lemme 6, donc  $R^\beta \circ \phi_\beta$  est p.s. égale à une fonction fortement mesurable à valeurs dans  $(B_0^*, B_1^*)^\beta$ , et  $\phi_\beta$  est p.s. égale à une fonction fortement mesurable à valeurs dans  $A_\beta$  par le lemme 8 a). D'après le lemme 8 b)  $g'(\theta) \in A_\theta$  pour tout  $\theta \neq \beta$ . Il en résulte que  $A^\theta = A_\theta$ , pour tout  $\theta \neq \beta$ . Enfin par le lemme 8 d)  $g'(\beta) = a \in A_\beta$ , d'où  $A^\beta = A_\beta$ . ■

**Proposition 9** *Soient  $A_0, A_1$  deux espaces de Banach tels que  $A_0$  s'injecte continuellement dans  $A_1$ , et  $\beta \in ]0, 1[$ . Si  $A_\beta$  a la propriété de Radon-Nikodym analytique (définie par exemple dans [DU]) pour un  $\beta \in ]0, 1[$ , alors  $A_\theta = A^\theta$  pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ .*

Pour  $\beta = 1$  ce résultat est [HP, Proposition 3.1]; appliqué au couple  $(A_0, A_\beta)$ , il donne la conclusion pour  $\theta \in ]0, \beta[$ .

Preuve: D'après le lemme 8 b), d), il suffit de montrer que pour toute  $g \in \mathcal{G}(\overline{A})$ ,  $\phi_\beta$  est p.s. mesurable à valeurs dans  $A_\beta$ .

On a mentionné dans la preuve du lemme 8 b) que la fonction  $z \rightarrow W(z) = g_1(\beta z)$  est dans  $\mathcal{G}(A_0, A_\beta)$ . À l'intérieur de  $S$ ,  $W'$  est donc holomorphe à valeurs dans  $A_0 + A_\beta = A_\beta$ ; par (1) elle est bornée. Comme  $A_\beta$  possède la propriété de Radon-Nikodym analytique,  $W'$  admet p.s. des limites non tangentielles au bord de  $S$ . Soit  $\psi$  la limite p.s. (dans  $A_\beta$ ) de  $W'$  sur la droite  $\operatorname{Re} = 1$ ;  $\psi$  est donc p.s. mesurable à valeurs dans  $A_\beta$ . Comme  $g'$  est continue (à valeurs dans  $A_0 + A_1 = A_1$ ) sur  $S$ ,  $\psi$  coïncide p.s. avec la fonction  $t \rightarrow \beta g'(\beta + i\beta t)$ , ce qui achève la preuve. ■

**Corollaire 10** *Si  $A_0$  s'injecte continuellement dans  $A_1$  avec image dense, si  $A_\beta$  est un treillis de Banach, et si  $(A_0^*, A_1^*)^\beta$  admet une norme équivalente LUR pour un  $\beta \in ]0, 1[$ , alors  $(A_0^*, A_1^*)_\theta = (A_0^*, A_1^*)^\theta$  pour tout  $\theta \in ]0, 1[$ .*

Preuve: Comme  $\ell^\infty$  n'admet aucune norme équivalente LUR [DGZ, Chap. II, theorem 7.10],  $(A_\beta)^* = (A_0^*, A_1^*)^\beta$  ne contient pas  $\ell^\infty$  isomorphiquement. Alors, d'après un résultat de Bessaga-Pelczyński [DU, Corollary I 6], l'espace  $(A_0^*, A_1^*)^\beta$  ne contient pas  $c_0$  isomorphiquement; comme c'est un treillis, il possède la propriété de Radon-Nikodym analytique [E]. Son sous-espace isométrique  $(A_0^*, A_1^*)_\beta$  conserve cette propriété. La proposition précédente appliquée à  $A_1^*, A_0^*$  achève la preuve. ■

**Remerciement:** *Je remercie chaleureusement F. Lust-Piquard pour ses conseils lors de la rédaction de ce travail.*

## References

- [A] W. Arveson: *An invitation to  $C^*$ -algebras*, *Graduate Texts in Maths* 39, Springer (1976).
- [BL] J. Bergh, J. Lofstrom: *Interpolation spaces an introduction*, Springer-Verlag-Berlin Heidelberg New York, (1976).
- [B] J. Bergh: *On the relation between the two complex methods of interpolation*, *Indiana Univ. Math. J.* 28, p. 775-777, (1979).
- [Da] M. Daher: *Une remarque sur l'espace  $A^\theta$* , *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 322, série I, n° 7, 641-644, (1996).
- [DGZ] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler: *Smoothness and renorming in Banach spaces*, Pitman, Monographs and Surveys 64, Longman Scientific, (1993).

- [DU] J. Diestel, J. J. Uhl: *Vector measures*, *Math. Surveys* 15 A.M.S, (1977).
- [E] G. A. Edgar: *Banach spaces with the analytic Radon-Nikodym property and abelian groups*, *Proc. Intern. Conf. On Almost Everywhere Convergence in Probability and Ergodic Theory (Columbus, Ohio)*, 195-213, (1989).
- [HP] U. Haagerup, G. Pisier: *Factorization of analytic functions with values in non commutative  $L^1$  spaces and applications*, *Can. J. Math.* *XLI* n<sup>o</sup>5, 882-906, (1989).